

Control Lyapunov-Integral de máquinas de inducción independiente de los parámetros de la carga

José Daniel Muñoz Frías, Aurelio García Cerrada

Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI). Universidad Pontificia Comillas.

Alberto Aguilera 23, 28015 Madrid

daniel@dea.icaei.upco.es aurelio@iit.upco.es

Resumen

A partir de un modelo de tercer orden del motor de inducción expresado en ejes de flujo de rotor, se desarrolla un controlador no lineal en el que una función de los errores de seguimiento y sus integrales se hace decaer a cero con una dinámica preestablecida. Para ello el controlador obliga a que esta función sea de Lyapunov. Además se consigue un control desacoplado del flujo y de la velocidad. Tanto la estabilidad como el desacople se mantienen a pesar de grandes variaciones en los parámetros de la carga. El artículo presenta resultados experimentales con un motor de 0.25 kW.

1. Introducción

El control vectorial directo de motores de inducción es claramente un problema de control no lineal. Una de las técnicas de control no lineal más estudiadas teóricamente en la literatura es la linealización exacta entrada-salida [1] [2]. En [3] se aplica un controlador de este tipo a un motor de inducción, pero sólo se discute su aplicación en tiempo continuo y sólo se presentan resultados de simulación. En [4] se muestra que la aplicación de este tipo de controladores a un motor de inducción en tiempo continuo consigue respuestas satisfactorias, obteniéndose un control desacoplado del flujo y la velocidad. Sin embargo también se muestra que el comportamiento del controlador se deteriora enormemente cuando se aplica en tiempo discreto con frecuencias de muestreo relativamente bajas (1 kHz), llegando a ser inestable a la velocidad nominal de la máquina.

En [5] se presenta una alternativa a este tipo de controladores, basada en una función de Lyapunov, que hace tender exponencialmente a cero los errores de seguimiento y proporciona un buen comportamiento cuando se implanta en tiempo discreto. En dicho trabajo se aplica el controlador a un motor de inducción usando un sistema de referencia fijo al estator. Ahora bien, en este sistema de referencia las corrientes del motor pueden tener frecuencias de 50 Hz o más, lo que obliga al uso de controladores rápidos de corriente que sean capaces de seguir las rápidas variaciones de las referencias. En [5] el controlador de Lyapunov se implanta con una frecuencia de muestreo de 2 kHz y los controladores de corriente con una frecuencia de 15 kHz. En [6] se muestra que la implantación de este tipo de controladores en ejes de flujo de rotor es muy ventajosa, ya que en este sistema de referencia las variables de estado son continuas o de variación lenta, con lo que la exigencia de velocidad a los controladores es mucho menor,

pudiéndose implantar todo el sistema con una frecuencia de muestreo de 1 kHz sin perder prestaciones.

En este tipo de controladores los errores en los parámetros del motor y de la carga provocan errores en régimen permanente, al igual que en un control proporcional clásico. De hecho el controlador mostrado en [6] presenta grandes errores en régimen permanente a par nominal en accionamientos de baja inercia. En el presente trabajo se aporta una solución original a este problema incluyendo la integral de los errores de seguimiento en la función de Lyapunov.

Las prestaciones del controlador propuesto se han investigado en un prototipo de laboratorio. Se muestra que es posible conseguir variar rápidamente la velocidad sin perturbar el control de flujo y que un escalón en el par de carga no perturba apreciablemente al sistema. Además el comportamiento es robusto frente a errores en la inercia estimada para la carga.

2. Control Lyapunov-Integral

Si se considera un sistema dinámico de la forma:

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + G(x)u \quad y = h(x) \quad (1)$$

y se definen los errores de seguimiento como $\tilde{y} = y - y_r$ se puede establecer como candidata a función de Lyapunov para garantizar la estabilidad del sistema en bucle cerrado:

$$V_t = \frac{1}{2} \sum_i \left(\tilde{y}_i + I_i \int \tilde{y}_i dt \right)^2 \quad (2)$$

que es una función semidefinida positiva ya que:

$$\tilde{y}_i + I_i \int \tilde{y}_i dt = 0 \quad (3)$$

cundo los errores de seguimiento siguen las trayectorias:

$$\tilde{y}_i = e^{-I_i t} \quad (4)$$

La derivada de V_t puede expresarse mediante:

$$\frac{d}{dt}V_t = \sum_i \left(\tilde{y}_i + I_i \int \tilde{y}_i dt \right) \cdot \left(\frac{d}{dt}\tilde{y}_i + I_i \tilde{y}_i \right) \quad (5)$$

Si se consigue que la derivada de cada uno de los errores de seguimiento venga dada por:

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}_i = -k_i \left(\tilde{y}_i + I_i \int \tilde{y}_i dt \right) - I_i \tilde{y}_i \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5) se obtendrá:

$$\frac{d}{dt}V_t = \sum_i -k_i \left(\tilde{y}_i + I_i \int \tilde{y}_i dt \right)^2 \quad (7)$$

que es una función semidefinida negativa.

A la vista de estos resultados no se puede aplicar directamente el teorema de estabilidad de Lyapunov, ya que la función V_t es semidefinida positiva en lugar de ser definida positiva. Sin embargo, tal como se acaba de demostrar, el conjunto E de R^n en el que V_t y su derivada son cero consta del origen y de la trayectoria $\tilde{y}_i = e^{-I_i t}$. Además E es un conjunto invariante. Por tanto aplicando el principio de invarianza de La Salle [7] se puede concluir que cualquier solución del sistema (1) tenderá al conjunto E , por lo que $\tilde{y}_i \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Teniendo en cuenta que la derivada de las salidas viene dada por [2]¹:

$$\frac{d}{dt}y_i = L_f h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} h_i(x) u_j \quad (8)$$

si el grado relativo² de todas las salidas es uno, para cada salida y_i al menos uno de los términos $L_{g_j} h_i(x)$ será distinto de cero y la entrada u_j aparecerá en dicha ecuación. Será posible entonces diseñar un controlador u de forma que se cumpla la ecuación (6) para cada una de las salidas. En este caso la respuesta dinámica de los errores de seguimiento del sistema en bucle cerrado vendrá dada por la ecuación (6), que es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución es:

$$\tilde{y}_i = c_{1i} e^{-I_i t} + c_{2i} e^{-k_i t} \quad (9)$$

Si en $t = 0$ las salidas del sistema y las integrales de los errores de seguimiento valen cero, se puede deducir que:

$$c_{1i} = -c_{2i} \frac{I_i}{k_i} \quad c_{2i} = -y_{ri} \frac{k_i}{k_i - I_i} \quad (10)$$

Conviene hacer notar que valores altos de k_i hacen al sistema más robusto frente a perturbaciones, pues pequeños errores de seguimiento provocarán valores de $\frac{d}{dt}V_t$ elevados que anularán rápidamente los errores. Sin embargo valores altos de k_i hacen que el sistema sea rápido, lo cual provoca saturaciones en el mando cuando las referencias varían bruscamente y hace que el sistema sea más sensible frente a errores en las medidas. Por tanto, es necesario llegar a un compromiso entre robustez y rapidez en el diseño de las ganancias de los controladores.

¹ $L_f^r h$ es la derivada de Lie de orden r de la función h con respecto al campo vectorial f .

² Por grado relativo de una salida se entiende el número de veces que hay que derivar dicha salida para que aparezca al menos una de las entradas del sistema en la expresión de la derivada.

3. Aplicación del control Lyapunov-Integral a un motor de inducción en ejes de flujo de rotor

El modelo del motor en ejes d-q solidarios al flujo de rotor puede expresarse como [8]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \\ \psi_{rd}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \omega_s & B \\ -\omega_s & A & -C\omega_R \\ D & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \\ \psi_{rd}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd}^r \\ u_{sq}^r \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\psi_{rq}^r = 0$$

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{P}{2J}(m_e - m_l) \quad (12)$$

en donde:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{R_S}{L_S \sigma} - \frac{R_R(1-\sigma)}{L_R \sigma} & B &= \frac{M R_R}{\sigma L_S L_R^2} \\ C &= \frac{M}{\sigma L_S L_R} & D &= \frac{M R_R}{L_R} \\ E &= -\frac{R_R}{L_R} & F &= \frac{1}{\sigma L_S} \\ m_e &= G \psi_{rd}^r i_{sq}^r & G &= \frac{PM}{2L_R} \end{aligned} \quad (13)$$

y ω_s es la velocidad de giro del sistema de referencia, que viene dada por:

$$\omega_s = \omega_R + \frac{D i_{sq}^r}{\psi_{rd}^r} \quad (14)$$

Si se definen como salidas del sistema el flujo en eje d (que coincidirá con su módulo) y la velocidad de giro del rotor:

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_{rd}^r \\ y_2 &= \omega_R \end{aligned}$$

se puede establecer como candidata a función de Lyapunov:

$$V_t = \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{y}_1 + I_1 \int \tilde{y}_1 dt \right)^2 + \left(\tilde{y}_2 + I_2 \int \tilde{y}_2 dt \right)^2 \right] \quad (15)$$

En donde $\tilde{y}_1 = \psi_{rd}^r - \psi_{rd}^{rr}$ e $\tilde{y}_2 = \omega_R - \omega_{Rr}$, siendo ψ_{rd}^{rr} y ω_{Rr} las referencias del flujo y de la velocidad del rotor respectivamente.

Las derivadas de los errores de seguimiento, aplicando (11) y (12), vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}_1 = D i_{sd}^r + E \psi_{rd}^r - \frac{d}{dt}\psi_{rd}^{rr} \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}_2 = \frac{P}{2J} (G \psi_{rd}^r i_{sq}^r - m_l) - \frac{d}{dt}\omega_{Rr} \quad (17)$$

Como se puede apreciar en las ecuaciones anteriores el grado relativo de las salidas respecto a las tensiones u_{sd}^r y u_{sq}^r es mayor que uno, con lo que la aplicación del controlador de Lyapunov no es posible si se toman como entradas al sistema las tensiones u_{sd}^r y u_{sq}^r . Sin embargo si se usa un inversor de

corriente, o un inversor de tensión controlado por corriente, las entradas del sistema serán las corrientes i_{sd}^r e i_{sq}^r , con respecto a las cuales las salidas y_1 e y_2 tienen un grado relativo de uno y el control de Lyapunov es aplicable.

Para que la función (15) sea una función de Lyapunov ha de verificarse la ecuación (6), por tanto teniendo en cuenta (16) y (17):

$$D i_{sd}^r + E \psi_{rd}^r - \frac{d}{dt} \psi_{rd}^r = -k_1 \left(\tilde{y}_1 + I_1 \int \tilde{y}_1 dt \right) - I_1 \tilde{y}_1 \quad (18)$$

$$\frac{P}{2J} (G \psi_{rd}^r i_{sq}^r - m_l) - \frac{d}{dt} \omega_{Rr} = -k_2 \left(\tilde{y}_2 + I_2 \int \tilde{y}_2 dt \right) - I_2 \tilde{y}_2 \quad (19)$$

De donde se pueden despejar las corrientes en ejes de flujo i_{sd}^r y i_{sq}^r para obtener la expresión del controlador de Lyapunov:

$$\begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_1(\tilde{y}_1 + I_1 \int \tilde{y}_1 dt) - I_1 \tilde{y}_1 - E \psi_{rd}^r + \frac{d}{dt} \psi_{rd}^r}{D} \\ \frac{(-k_2(\tilde{y}_2 + I_2 \int \tilde{y}_2 dt) - I_2 \tilde{y}_2 + \frac{d}{dt} \omega_{Rr}) \frac{2J}{P} + m_l}{G \psi_{rd}^r} \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. Control del inversor en modo corriente en ejes de flujo

En la Sección 3 se ha mostrado que para implantar el control de Lyapunov es necesario usar como entradas al sistema las corrientes de estator en lugar de las tensiones. Para ello es necesario controlar el inversor en modo corriente, existiendo varios métodos para llevarlo a cabo. Un primer método es usar un controlador de corriente de alta ganancia y alta velocidad de respuesta que garantice que la corriente de estator sigue exactamente a la referencia, pudiéndose usar controladores PWM o controladores con histéresis [9]. En ambos casos, debido a la alta velocidad necesaria, la implantación mediante un microprocesador es problemática, pudiendo ser necesario recurrir a circuitería adicional para su implantación analógica. En este trabajo se implementa el controlador de corriente en ejes de flujo teniendo en cuenta la dinámica del estator en el controlador, lo que permite su implantación digital a bajas frecuencias de muestreo.

La dinámica del estator de la máquina se obtiene de la ecuación (11):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \omega_S \\ -\omega_S & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd}^r \\ u_{sq}^r \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ -C\omega_R \end{bmatrix} \psi_{rd}^r \end{aligned} \quad (21)$$

donde se puede apreciar que están acopladas ambas corrientes. Si se quiere controlar cada corriente por separado es necesario incluir una realimentación no lineal para conseguir desacoplar el sistema:

$$\begin{aligned} u_{sd}^r &= u_{sd}^{r'} - \frac{\omega_S i_{sq}^r + B \psi_{rd}^r}{F} \\ u_{sq}^r &= u_{sq}^{r'} + \frac{\omega_S i_{sd}^r + C \omega_R \psi_{rd}^r}{F} \end{aligned} \quad (22)$$

con lo que el sistema original (21) se transforma en:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd}^{r'} \\ u_{sq}^{r'} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Que como se puede apreciar forman dos sistemas una entrada – una salida totalmente desacoplados de la forma:

$$\frac{d}{dt} i_{sx}^r = A i_{sx}^r + F u_{sx}^{r'} \quad (24)$$

Si se aumenta el sistema para incluir una integración se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sx}^r \\ \int i_{sx}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx}^r \\ \int i_{sx}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} u_{sx}^{r'} \quad (25)$$

Siendo posible diseñar un controlador en variables de estado mediante asignación de polos para este sistema.

5. Estimador de flujo de rotor

El control desarrollado en la Sección 3 necesita una medida del flujo de rotor. En este trabajo se ha usado un estimador en bucle abierto. Con él se consigue un buen comportamiento del sistema manteniendo un bajo coste computacional.

A partir del modelo de la máquina en ejes de flujo de rotor y de la velocidad de giro de dichos ejes se obtiene [8]:

$$\frac{d\hat{\psi}_{rd}^r}{dt} = D i_{sd}^r + E \hat{\psi}_{rd}^r \quad (26)$$

$$\hat{\omega}_S = \omega_R + \frac{D i_{sq}^r}{\hat{\psi}_{rd}^r} \quad (27)$$

Pudiéndose estimar la magnitud y la posición del vector de flujo integrando (26) y (27).

6. Resultados experimentales

El sistema de control presentado se ha aplicado a un motor de inducción de 0.25 kW, cuyos parámetros se encuentran en el apéndice A. El controlador se ha implementado en un microprocesador Pentium usándose “Real-Time Linux” como sistema operativo de tiempo real. Para generar las señales de disparo de los IGBT's del inversor se ha usado un circuito coprocesador basado en FPGA [10]. Las medidas que se obtienen de la planta son dos corrientes de fase de la máquina mediante dos sondas de efecto Hall y la velocidad de giro mediante un encoder incremental de 1024 pulsos por vuelta.

El controlador se ha implantado en tiempo discreto con una frecuencia de muestreo de 1 kHz. El controlador de Lyapunov-Integral (20) se ha diseñado con $k_1 = 1000$ e $I_1 = 0$ para el controlador de flujo y con $k_2 = 50$ e $I_2 = 4$ para el controlador de velocidad. En éste último controlador se ha supuesto que la inercia de la máquina es de $J = 0.01 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, nueve veces mayor que la real y que el par de carga es cero, con el fin de mostrar la independencia del controlador a los parámetros de la carga.

Los controladores de corriente se han elegido PI con una constante de tiempo en lazo cerrado de 5 ms y un factor de

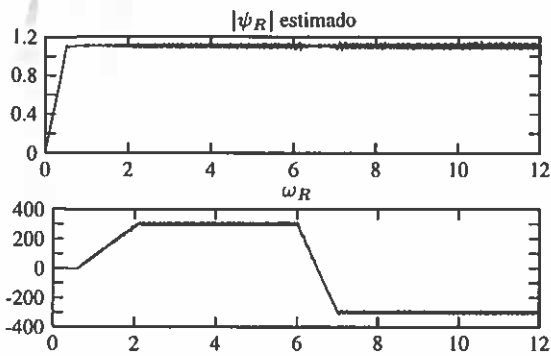


Figura 1. Evolución de las salidas del motor. Eje x en seg. Ejes y en Wb y rad_{el}/s .

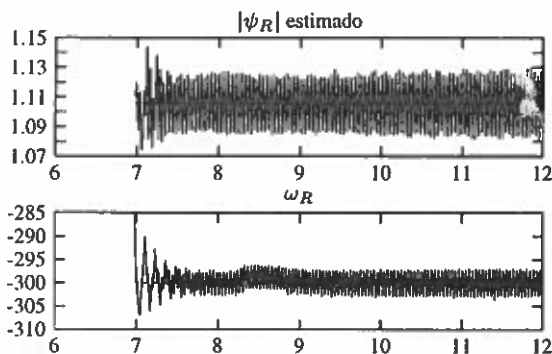


Figura 2. Evolución de las salidas del motor (detalle). Eje x en seg. Ejes y en Wb y rad_{el}/s .

amortiguamiento de $1/\sqrt{2}$. Los controladores de corriente también se implantan a 1 kHz de frecuencia de muestreo.

En la Figura 1 se muestra un primer experimento en el que los primeros 0.5 segundos se crea flujo para después acelerar el motor a velocidad nominal. En $t = 6$ s se realiza una inversión de giro, pudiéndose apreciar que si bien dicho cambio se realiza en sólo un segundo, el control de flujo no se perturba. Por último en $t \approx 8.25$ s se conecta un par de carga de 1 Nm, pudiéndose apreciar en la Figura 2 (detalle de la Figura 1) que el control apenas se perturba. En la Figura 3 se muestra un ensayo similar al anterior pero en el que la velocidad final se sitúa en 100 radianes eléctricos. Como se puede apreciar a velocidades bajas la medida de velocidad presenta bastante ruido³, aunque no perturba al controlador.

Por último, se ha verificado mediante simulación que la variación de la inercia en la carga no perturba apreciablemente al controlador. De hecho aunque se varíe 100 veces la inercia de la máquina, el resultado obtenido es idéntico al conseguido cuando la inercia tiene su valor nominal.

³El ruido presente en la medida de velocidad a bajas velocidades se debe a que se usa un frecuencímetro para obtener dicha medida a partir de los pulsos del encoder. El uso de un periodómetro a bajas velocidades podría solucionar este problema.

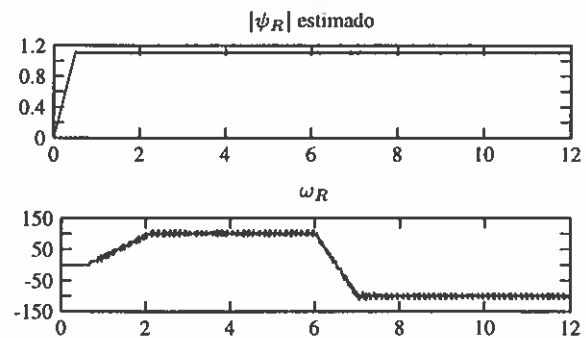


Figura 3. Evolución de las salidas del motor. Eje x en seg. Ejes y en Wb y rad_{el}/s .

A. Parámetros del motor

$R_R = 25 \Omega$	$R_S = 50.1915 \Omega$
$L_R = 1.3725 H$	$L_S = 1.3725 H$
$M = 1.2648 H$	$P = 4$ Polos
$V_{nom} = 400 V$	$I_{nom} = 0.86 A$
Potencia = 0.25 kW	$J = 0.0011 Kg \cdot m^2$

Referencias

- [1] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, London, third edition, 1995.
- [2] Jean-Jacques E. Slotine y Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [3] Riccardo Marino, Sergei Peresada, y Paolo Valigi. Adaptive input-output linearizing control of induction motors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):208–221, February 1993.
- [4] José Daniel Muñoz Frías y Aurelio García Cerrada. Control mediante linealización entrada-salida del motor de inducción. En *Seminario Anual de Automática, Electrónica industrial e Instrumentación*, pgs. 65–68, Septiembre 1998.
- [5] Riccardo Marino, Sergei Peresada, y Patrizio Tomei. Output feedback control of current-fed induction motors with unknown rotor resistance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(4):336–347, July 1996.
- [6] Aurelio García Cerrada y José Daniel Muñoz Frías. Control de Lyapunov en tiempo discreto de máquinas de inducción. En *Seminario Anual de Automática, Electrónica industrial e Instrumentación*, pgs. 319–322, Septiembre 1998.
- [7] Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 1996.
- [8] Aurelio García Cerrada. *Observer-based field-oriented controller for an inverter-fed traction induction motor drive*. PhD thesis, University of Birmingham, July 1991.
- [9] Peter Vas. *Sensorless Vector and Direct Torque Control*. Number 42 in Monographs in electrical and electronic engineering. Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford, 1998.
- [10] Aurelio García Cerrada, José Daniel Muñoz Frías, Fidel Fernández Bernal, Pablo García González, y Andrew Robertson. Control de inversores trifásicos PWM basado en FPGA. En *Seminario Anual de Automática, Electrónica industrial e Instrumentación*, Septiembre 1999.